作者：无限大炮  
链接：https://www.zhihu.com/question/46778937/answer/1999313867  
来源：知乎  
著作权归作者所有。商业转载请联系作者获得授权，非商业转载请注明出处。

不是专门做这个的，仅仅根据Subsystems of Second Order Arithmetic的第一章来简单解释一下。

**一、二阶算术的五大子系统**

反推数学的研究动机是这样一个问题：给定一个数学定理，为了证明这个定理我们需要多么强的**集合存在公理**？首先需要明确，这里的数学定理指的是“日常数学”中的定理，即那些**不涉及不可数集合的存在性并且不需要对某个运算进行不可数次操作的非集合论数学**。这些数学至少包括几何、数论、微积分、（可数）代数、微分方程、实分析、复分析、完全可分度量空间理论等等。而那些涉及不可数的数学通常要依赖于集合论中的强存在性公理和幂集公理，包括一般拓扑、不可数代数、以及集合论自身的研究课题。这些“可数数学”可以在二阶算术中形式化，而二阶算术中的集合存在公理是指**内涵公理模式**：

设 是一个二阶算术语言中公式的集合，我们定义 -内涵公理模式为 ： ，其中 是一个 中的公式， 不在其中自由出现。

这样，集合存在公理就可以明确为内涵公理模式的一些片段。如果 是所有二阶算术语言的公式的集合，就称为全内涵公理模式。如果 中的公式都不含二阶量词，就称为**算术内涵公理模式**。对任意自然数m和n，我们定义 -内涵公理模式为 ，其中是一个 公式， 是一个 公式，n 是数字变元，X 是集合变元且不在 中出现。

另一个需要控制的公理模式是归纳法，我们称如下句子为归纳公理：

。

注意这里归纳公理是一条单个公理，而不是一个公理模式。

反推数学中常用的二阶算术的子系统有五个，它们被称为五大子系统，分别是： 、 、 、 、 。其中 的公理由 +-内涵公理模式构成。 和分别是将二阶算术的内涵公理模式限制到算术公式、-公式得到的系统（使用归纳公理而不是归纳公理模式）。 是在 的基础上增加这样一条公理：

（弱库尼希引理）二叉树 的每个无穷子树都有一条无穷路径。

的定义比较复杂，简单来说，它是在 的基础上增加了“算术超穷递归定义“的合理性。

算术内涵公理模式蕴含库尼希引理、 -内涵公理模式蕴含”算术超穷递归定义“，而弱库尼希引理在 中不可证，”算术超穷递归定义“在 中不可证。因此， 这五大 子系统之间是真包含关系，即 。

反推数学中一部分工作是要在这五个子系统中建立起上文所说的”日常数学“，这部分”正推数学“是反推的基础。而这五个子系统恰好分别对应了20世纪数学基础和数学哲学中的一些流派，这就是提问中那个表格的第四和第五栏所对应的那些内容。这里简单说下 ，它是五大子系统中最弱的一个，但已经足以定义实数，并证明许多关于实数结构的性质，比如可以证明实数是一个阿基米德序域。更进一步，以下定理都在 中可证：  
1.贝尔纲定理；  
2.介值定理；  
3.完全可分度量空间上的Usysohn引理和Tietze扩张定理；  
4.可数语言的可靠性定理；  
5.每个可数域都存在代数闭包。

**二、反推数学**

下面我们来解释怎么来确定 **证明某个数学定理所需要的最弱的集合存在公理** 。给定一个日常数学中的定理 ，我们希望找到能够证明 的最弱的二阶算术的自然子系统 。当然这里最弱的意思总是相对于某个base theory来说的，因为无论是形式化数学定理还是证明两个定理的等价性都需要选定在某个base系统中进行，这样的base theory通常是选 。

为了证明某个公理系统S是能够证明定理 的最弱的系统，需要证明两个事实：  
（1）在S 可以证明 ；  
（2）在一个比S更弱的系统 中，从 推出S 的公理。

对于某个日常数学中的定理 ，我们首先需要在二阶算术的某个子系统S中形式化它原有的（非形式）证明，这是正推的方向。第二步是要从一个比S更弱的系统 中，从 推出S 的公理，结合第一步的结果就得到 与S等价。这就证明了S就是能够证明 的最弱的系统。之所以需要在比S更弱的系统 中证明 与S等价是因为在S中， 与S的等价是平凡的。

以数学分析中的单调有界原理为例，它断言 *单调有界实数序列必定收敛*。我们可以在 中形式化单调有界原理的经典证明，这证明了单调有界原理的“上界”是 。我们又可以在 中证明单调有界原理蕴含算术内涵公理模式，这证明了单调有界原理的“下界”也是 。这样就在 中证明了单调有界原理与算术内涵公理模式等价，我们可以简单说单调有界原理与 等价。

反推数学的研究发现，许多日常数学中的定理 ，能够证明 的最弱的二阶算术的自然子系统 恰好就是五大子系统中的某一个。例如，在 中可以证明弱库尼希引理与下述命题等价：  
1.Heine-Borel覆盖引理；  
2.紧致度量空间的每个开覆盖都有一个子覆盖；  
3.紧致度量空间上任意实值连续函数都是有界的；  
4.可数语言的哥德尔完备性定理；  
5.每个可数交换环都有一个素理想；  
6.可分Hahn-Banach定理。

这五个子系统为我们提供了一个统一的“尺子”去测量**不同领域的数学定理的强度**。分析学中的Heine-Borel定理、代数中的交换环的素理想定理和数理逻辑中的完全性定理都等价于 ，而单调有界原理比这几个定理都更强，因为证明它需要更强的公理，它的强度是 。

一个例外是拉姆齐定理，拉姆齐定理的完整版本等价于 ，但二元组的2-染色拉姆齐定理 不等价于五大子系统中的任何一个，它严格的弱于 ，但 不蕴含 ， 也不蕴含 。关于拉姆齐定理更详细的介绍可以参考 杨跃 教授的文章——《紧致性与拉姆塞定理》。

**三、反推数学与希尔伯特纲领**

反推数学的研究动机一部分来自希尔伯特纲领。这里说下反推数学与希尔伯特纲领的关系，众所周知，希尔伯特纲领的目标是用有穷主义方法证明无穷的古典数学的一致性。但希尔伯特纲领的目标有时候也被解读为一种保守性纲领：每个能够用古典数学方法（使用了抽象的、无穷的概念）证明的关于有穷主义数学的命题，都能用有穷主义方法证明。这里有穷主义数学命题指的是 命题。根据Tait的论证，希尔伯特的有穷主义可以被原始递归算术PRA刻画，因此，上述保守性目标就变成了：每个能够用古典数学方法（使用了抽象的、无穷的概念）证明的关于有穷主义数学的定理，都能在PRA中证明。保守性的一个直接推论是相对一致性，如果无穷数学是不一致的，那么有穷主义数学也是不一致的。这就将无穷数学的一致性规约到了有穷主义数学。关于希尔波特纲领更详细的介绍可以参考[无限大炮：希尔伯特纲领](https://zhuanlan.zhihu.com/p/372622407)

证明论中有一个著名的结果： 相对于PRA是 -保守的，即对任意句子，其中 是 公式，如果，那么我们能够构造一个项 ，使得 。

我们又可以证明 是 的保守扩张，即对任意一阶算术句子 ，如果 ，那么 。

虽然 严格强于 ，但 相对于 是 保守的。对任意 句子 ，如果 ，那么 。

结合以上所有结果，我们就知道 相对于 是 -保守的。注意到希尔伯特纲领仅仅要求证明 -保守性，而我们已经知道在 中可以发展起相当大一部分的古典数学，这意味着上述一系列保守性结果表明希尔伯特纲领的保守性目标是可以部分实现的。因此，Simpson将反推数学的结果解释为**希尔伯特纲领的部分实现**。

问题中提到的那篇文章的主定理（Theorem 7.4）是 相对于 的一个保守性结果，这个定理的一个直接推论是 相对于 是 -保守的，这也被作者看作是对希尔伯特纲领的贡献。

[编辑于 07-15](//www.zhihu.com/question/46778937/answer/1999313867)

真诚赞赏，手留余香

赞赏

还没有人赞赏，快来当第一个赞赏的人吧！

​赞同 7​​收起评论

​分享

​收藏​喜欢

​

收起​

**4 条评论**

​切换为时间排序

[HypCos](//www.zhihu.com/people/hyp_cos)07-16

数学中有一些关于实数、以实数为自变量的函数、以实数函数为自变量的泛函、以实数泛函为自变量的“高阶函数”等等，它们的论域很大（刚才那4个论域大小分别是beth1~beth4），无法用二阶算术的语言来表述（比如一个“对任意实数泛函，它怎么怎么样”的命题，需要beth3大小的论域才可能表达）。关于这些命题的反推数学是什么样的？

​赞​回复​踩​ 举报

[无限大炮](//www.zhihu.com/people/48bde983d2601da053cedc23371ad46e) (作者) 回复[HypCos](//www.zhihu.com/people/018cd78769560d77c2d7bc6ce5c64ed2)07-18

通过编码可以将高阶对象编码成二阶对象来处理，可以参考Simpson书中对实分析和泛函分析的处理。最近出现了一种higher order reverse mathematics，使用高阶算术系统来形式化古典数学，可以避免编码。

​赞​回复​踩​ 举报

[HypCos](//www.zhihu.com/people/018cd78769560d77c2d7bc6ce5c64ed2)回复[无限大炮](//www.zhihu.com/people/48bde983d2601da053cedc23371ad46e) (作者) 07-18

关键问题是：二阶算术可以讨论自然数集的子集，这样的子集有beth1个。实数有beth1个，所以关于实数的问题可以编码到“自然数集的子集”上。但是实数函数有beth2个，它不能编码到“自然数集的子集”上；如果强行做一些对应，就一定有多个不同的实数函数对应到同一个“自然数集的子集”上。更不用说总共有beth3个的实数泛函了。  
如何解决“实数函数太多了”“实数泛函太多了”这样的问题呢？

​赞​回复​踩​ 举报

[无限大炮](//www.zhihu.com/people/48bde983d2601da053cedc23371ad46e) (作者) 回复[HypCos](//www.zhihu.com/people/018cd78769560d77c2d7bc6ce5c64ed2)07-18

在二阶算术里形式化的都是“可数数学”或者可以“可数表示”的对象，我们很多时候并不需要考虑一般的拓扑空间，而只需要考虑一些具有良好性质的空间，比如在分析学里仅仅考虑完全可分度量空间就可以了，而这些空间都是可以”可数编码“的。对于数学的实际应用来说，并不需要所有的实数函数，往往只需要考虑连续函数就足够了。